b) $0,5 \le x \le 0,6 \Rightarrow f(0,6) \le f(x) \le f(0,5)$
car f est décroissante
Calculatrice.... $\Rightarrow$ $0,5 \le f(x) \le 0,6$
$f(x) \ge 0$ d'après 2°) a)
$f'(x) \ge -0,25$ (à vérifier)
$\Rightarrow -0,25 \le f'(x) \le 0 \le 0,25$
$\Rightarrow |f'(x)| \le 0,25$

2) On a f est continue sur $[0,5; 0,6]$
f est dérivable sur $]0,5; 0,6[$
et $|f'(x)| \le 0,25 \quad \forall x \in]0.5; 0.6[$
α et $U_n \in [0,5; 0,6]$
(Remarque : pour $U_n \in [0,5; 0.6]$ par récurrence)
donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :
$|f(U_n) - f(\alpha)| \le (0,25)\ |U_n - \alpha|$
$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)\ |U_n - \alpha|$
*pour n = 0
On a : $|U_0 - \alpha| = |0,5 - \alpha| \le 0,1$
Car $0,5 \le \alpha \le 0,6$
$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \le (0,25)^0 . 0,1$ (Vrai)
* supposons que : $|U_n - \alpha| \le (0.25)^n . 0,1$
et montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)^{n+1} . 0,1$
en effet : $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25) . |U_n - \alpha|$
$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le (0,25) . (0.25)^n . 0,1$
Car $|U_n - \alpha| \le (0,25)^n . 0,1$
Donc $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)^{n+1} . 0,1$
Conclusion : $|U_n - \alpha| \le (0.25)^n . 0,1 ; n \in IN$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,25)^n . 0,1 = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \alpha = 0$
et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

c) $(0,25)^n . 0,1 \le 5 \times 10^{-4}$
$\Leftrightarrow (0,25)^n . \le 5 \times 10^{-3}$
$\Leftrightarrow Ln(0,25)^n \le Ln(5 \times 10^{-3})$
(Ln croissante)
$\Leftrightarrow n.Ln(0,25) \le Ln(5 \times 10^{-3})$
($Ln a^n = n Ln a$)
$\Leftrightarrow n \ge \dfrac{Ln(5.10^{-3})}{Ln(0,25)}$ ($Ln(0,25) \le 0$)
$\Leftrightarrow n \ge 3,83....$ Donc $n = 4$

Partie c

1) $f'(x) + f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

2) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - f'(x)$

D'où $F(x) = -Ln(1+e^{-x}) - f(x)$

$F(x) = -Ln(1+e^{-x}) - e^{-x} Ln(1+e^{x})$

:est une primitive de f sur IR

EX37

Partie A

$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right) e^{-x} \qquad n \in IN^*$

1) la fonction $x \to \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ est dérivable sur IR
En particulier sur $[0, +\infty[$,comme étant fonction polynôme
La fonction e^{-x} est dérivable sur $[0, +\infty[$
D'où f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$

$$*f_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-x} - e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x} - e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$
$$= -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

b) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} (x^k e^{-x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^k e^{-x} = \lim \dfrac{1}{\left(\frac{e^x}{x^k}\right)} = 0$ ($\frac{e^x}{x^k} \to +\infty$)

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn